L'équation du temps de Képler

Cette démonstration permet de relier la date avec la position sur l'orbite, en partant des observations astronomiques, sans invoquer la loi de la gravitation (inconnue à l'époque de Képler).

Partons les 2 premières lois de Képler :
Première loi : la trajectoire des planètes est une conique, soit l'équation, en coordonnées polaires :

$$\boxed{r = \frac{p}{1+e.\cos\theta}}$$

Deuxième loi : le mouvement obéit à la loi des aires : l'aire balayée par unité de temps par le rayon-vecteur est une constante. Le calcul de la date est donc directement lié à celui de l'aire balayée :

$\boxed{\frac{S}{\pi ab} = \frac{t}{T}}$, où T est la période de révolution, et πab l'aire de l'ellipse.

Exprimons l'aire balayée pendant dt : $dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \frac{p^2 d\theta}{(1+e.\cos\theta)^2}$.

Exprimons $\cos\theta$ en fonction de $\tan\frac{\theta}{2}$: $\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ et transformons $1+e\cos\theta$:

$$1+e\cos\theta = 1+e\,\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = (1+e)\,\frac{1+\frac{1-e}{1+e}.\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

Posons maintenant $\boxed{\tan^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-e}{1+e}\tan^2\frac{\theta}{2}}$: **j est l'anomalie excentrique** .

$$1+e\cos\theta = (1+e)\,\frac{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = (1+e)\,\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

. Alors : $1+e.\cos\theta = (1+e)\,\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\varphi}$

Ou encore : $\cos\theta = \frac{\cos\varphi - e}{1-e\cos\varphi}$

Et, en différentiant la formule définissant l'anomalie excentrique, il vient : $\frac{d\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$

c'est-à-dire : $\frac{d\varphi}{1+\cos\varphi} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\frac{d\theta}{1+\cos\theta}$.

Ainsi, l'expression de l'aire balayée devient : $dS = \frac{p^2}{2}\,\frac{d\theta(1+\cos\varphi)^2}{(1+e)^2(1+\cos\theta)^2} = \frac{p^2}{2(1+e)^2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{d\varphi(1+\cos\varphi)}{1+\cos\theta}$.

Il n'y a plus qu'à transformer le dénominateur, pour obtenir : $dS = \frac{p^2}{2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(1-e\cos\varphi)d\varphi$

On se rappelle aussi que $a = \frac{p}{1-e^2}$ (demi grand axe) et $b = a\sqrt{1-e^2}$ (demi petit axe).

Ainsi donc : $dS = \frac{ab}{2}(1-e\cos\varphi)d\varphi$.

On intègre maintenant l'aire balayée depuis φ=0 (périhélie) :

$\boxed{S = \frac{ab}{2}(\varphi - e\sin\varphi)}$ et finalement $\boxed{t = \frac{T}{2\pi}(\varphi - e\sin\varphi)}$.

On obtient ainsi une relation entre la date depuis le périhélie et l'anomalie excentrique, et, par suite, l'angle θ : c'est **l'équation du temps de Képler**